

Figura 1

1 - A equação de movimento do sistema representado na Figura 1 é $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k. (1 valor)

b) Quando a razão de amortecimento ξ é menor do que 1, que forma têm as raízes da equação característica? Represente graficamente o movimento do sistema para este caso. (1)

2 - Considere um sistema com um grau de liberdade actuado por uma força harmónica. Neste caso, a equação diferencial do movimento é da forma $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\cos(\omega t)$, com m, c, k e F constantes.

a) A resposta permanente pode-se escrever como $x_p(t)=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$. Partindo desta expressão, deduza as expressões que relacionam a amplitude $X(\omega)$ e o ângulo de fase $\phi(\omega)$ da resposta permanente com m, c, k, F e ω.(1.5)

b) O factor de amplificação dinâmica $\mu(\omega)$ é dado por $\mu(\omega)=X(\omega)/X_s$, em que X_s representa o deslocamento estático. Represente graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da razão de frequências ω/ω_n, para três casos típicos: razão de amortecimento muito pequena ($\xi<0.1$), média ($0.3<\xi<0.5$) e elevada $\xi>1$. (0.75)

3 – Sistemas com n graus de liberdade

a) Sugira uma transformação de coordenadas para desacoplar as equações do movimento de um sistema discreto com n graus de liberdade, não amortecido e sob a acção de forças exteriores. (0.75)

b) Escreva as equações do movimento desacopladas, explicitando a forma das matrizes e vector(es). (0.75)

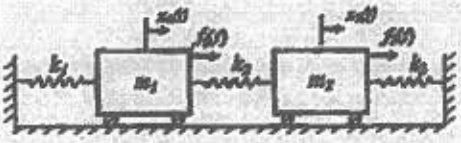


Figura 2

c) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na Figura 2 são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais são as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1? (0.75)

4 – Deduza a equação diferencial parcial do movimento transversal, $v(x,t)$, de uma corda de secção transversal com área A, com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ (A, E e ρ constantes), sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo z (Figura 3). (1.5)

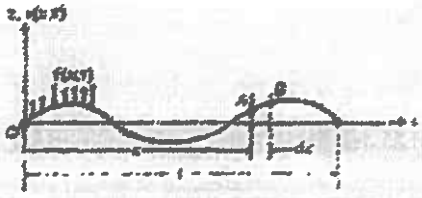
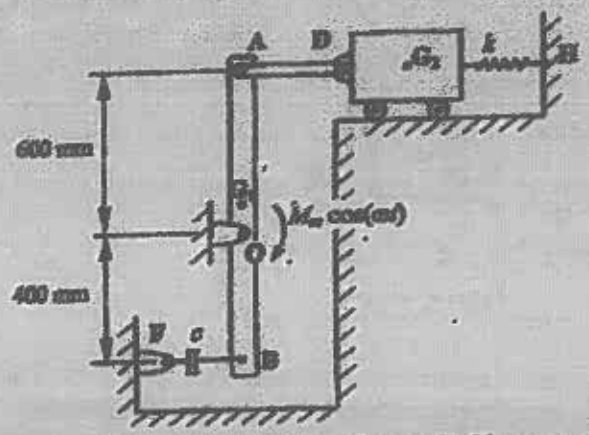


Figura 3

Relações trigonométricas: $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$; $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.



$\overline{AB} = \ell = 1$ m

$\overline{AG_1} = \frac{\ell}{2}$

O sistema representado na figura acima é constituído por uma barra rígida[1], de massa m_2=2 kg. A barra está articulada no ponto O e sujeita à acção de um momento motor $M_m \cos(\omega t)$. Está também ligada ao exterior no ponto A através de uma pequena barra (AD), de uma massa rígida de 2 kg e de uma mola com rigidez k=50 N/m. A barra AD é rígida e de massa desprezável. Os pontos B e F encontram-se ligados por um amortecedor viscoso. Admita que os deslocamentos são pequenos e que em repouso a barra se encontra na vertical.

a) Obtenha a equação do movimento.

Suponha que a equação do movimento é: $0.9\ddot{\theta}(t)+0.09c\dot{\theta}(t)+15.06\theta(t)=M_m\cos(\omega t)$

e determine:

b) a frequência natural, ω_n;

c) sabendo que o tempo que decorre entre dois picos sucessivos de vibração em regime livre é 2 segundos, calcule a constante de amortecimento c;

d) para uma frequência de excitação de 6 rad/s, calcule a amplitude (M_m) máxima do momento motor de modo a que a amplitude de vibração no ponto A não ultrapasse os 6 milímetros;

e) na situação da alínea anterior, obtenha as amplitudes das forças nos pontos A e B.

2 – O sistema representado na figura seguinte é constituído por duas molas, de rigidez k_1=1000 N/m e k_2= 2000 N/m, e por um carrinho rígido de massa m_1= 2.67 kg que translada horizontalmente ($x_1(t)$) sob a acção de uma força harmónica $f(t)=F\cos(\omega t)$, com F=3 N. Verificou-se que a máxima amplitude de vibração ocorre à frequência de 30 rad/s, que é também a frequência de funcionamento do sistema. Para resolver este problema, acrescentou-se uma barra rígida[1] ao corpo 1, articulada no ponto O (rotação $\theta(t)$), de massa m_2=1 kg e comprimento L=0.1 m, e uma mola de rigidez k_3= 500 N/m.

[1] Nota: o momento de inércia de uma barra em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é $I_G=\frac{1}{12}m\ell^2$

Exame – 13/01/04

Parte Teórica

3. a) Uma transformação de coordenadas projectando o sistema de equações na base modal usando para o efeito a matriz de transformação formada pelos vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix} =$$

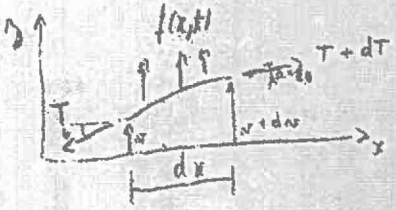
$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \cdots + \phi_{n1} f_n(t) \\ \vdots \\ \phi_{1n} f_1(t) + \cdots + \phi_{nn} f_n(t) \end{Bmatrix}$$

c) As amplitudes máximas tendem para ∞ quando a frequência de excitação tende para uma das duas frequências naturais do sistema (para ambas as massas).

A amplitude máxima da massa 1 é zero e ocorre para $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

(46)

4.



$$-T \operatorname{sen}\theta + f(x,t)\,dx + (T+dT)\operatorname{sen}(\theta + d\theta) = \rho A\, dx \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

Para θ pequenos:

$$\operatorname{sen}\theta \simeq \tan\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \implies \operatorname{sen}(\theta + d\theta) \cong \tan(\theta + d\theta) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx$$

Considerando tensão constante, $\frac{\partial T}{\partial x}dx = 0$

$$-T\frac{\partial v}{\partial x} + f(x,t)\,dx + \Big(T + \cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial x}dx}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\Big) = \rho A\, dx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-T\frac{\partial v}{\partial x}} + f(x,t)\,dx + \cancel{T\frac{\partial v}{\partial x}} + T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx = \rho A\, dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Dividindo tudo por dx

$$T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Parte Prática

2. a) Graus de liberdade: $\theta(t)$; $x_1(t)$

(ângulo em torno de O (sentido anti-horário))

$$J_0 = \frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_2 l^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\sin\theta + x_1\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 \left(l \sin\theta\right)^2 \approx$$

$$= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 l^2 \theta^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\vec{f}(t) \cdot x_1\right) = f(t)$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\vec{f}(t) \cdot x_1\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \frac{l}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1 + k_2) x_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_2 l^2}{3}\dot{\theta} + m_2\left(\frac{l}{2}\dot{\theta} + \dot{x}_1\right)\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{7 m_2 l^2}{12}\ddot{\theta} + m_2 \frac{l}{2}\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = k_3 l^2 \theta$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 \frac{l}{2}\ddot{\theta} + (k_1 + k_2) x_1 = f(t) \\ \frac{7 m_2}{12} l^2 \ddot{\theta} + m_2 \frac{l}{2}\ddot{x}_1 + k_3 l^2 \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \frac{l}{2} \\ m_2 \frac{l}{2} & \frac{7 m_2}{12} l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2 \frac{l}{2}\omega^2 \\ -m_2 \frac{l}{2}\omega^2 & k_3 l^2 - \frac{7 m_2}{12} l^2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo valores, calculando o determinante característico e igualando-o a zero.

Exame de 13 Janeiro de 2006

PARTE TEÓRICA

(3.)

a) Uma transformação de coordenadas projectando o sistema de equações na base modal usando para o efeito a matriz de transformação formada pelos vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

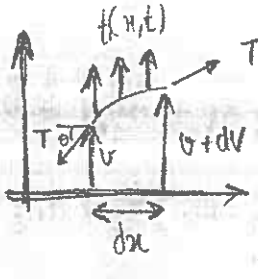
b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_m(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 & & & 0 \\ & w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_m(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \cdots + \phi_{m1} f_m(t) \\ \vdots \\ \phi_{1n} f_1(t) + \cdots + \phi_{mn} f_n(t) \end{Bmatrix}$$

c) As amplitudes máximas tendem para ∞, quando a freq. de excitação tende para uma das duas frequências naturais do sistema (para ambas as massas). A amplitude mínima da massa 1 é zero e ocorre p/ $w_1 < w < w_2$.

(4)



$$-T\operatorname{sen}\theta + f(x,t) + (T+dT)\operatorname{sen}(\theta+d\theta) = \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{dt^2}$$

Para θ pequenos:

$$\operatorname{sen}\theta = \tan\theta = \frac{dv}{dx}; \quad \operatorname{sen}(\theta+d\theta) = \tan(\theta+d\theta) = \frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 v}{dx^2} dx$$

Considerando $\frac{\partial T}{dx} dx = 0$

$$-T\frac{dv}{dx} + f(x,t) + \left(T + \frac{\partial T}{dx} dx\right)\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv^2}{dx^2} dx\right) = \rho A \frac{d^2 v}{dt^2}$$

Dividindo por dx:

$$T\frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{dt^2}$$

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2\frac{l}{2}\ddot{\theta} + (k_1+k_2)x_1 = f(t) \\ \frac{7m_2l^2}{12}\ddot{\theta} + m_2\frac{l}{2}\ddot{x}_1 + k_3l^2\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2\frac{l}{2} \\ m_2\frac{l}{2} & \frac{7m_2l^2}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & 0 \\ 0 & k_3l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t - \phi)$

$$[[K] - \omega^2[m]]\{u\} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2(m_1+m_2) & -\omega^2 m_2\frac{l}{2} \\ -\omega^2 m_2\frac{l}{2} & k_3l^2 - \omega^2\cdot\frac{7m_2l^2}{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo pelos valores, e calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} 3000-\omega^2\cdot 3{,}67 & -0{,}05\omega^2 \\ -0{,}05\omega^2 & 5-\frac{7\times 0{,}1^2}{12}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \begin{cases} \omega_1 = 24{,}967 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 35{,}674 \text{ rad/s} \end{cases}$$

1ª forma natural

$$(3000 - 24{,}967^2\times 3{,}67)u_1 - 0{,}05\times 24{,}967^2 u_2 = 0$$

$$u_1 = +0{,}0437\,u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} +0{,}0437 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural

$$(3000 - 35{,}674^2\times 3{,}67)u_1 - 0{,}05\times 35{,}674^2 u_2 = 0$$

$$u_1 = -0{,}0380\,u_2$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}0380 \\ 1 \end{Bmatrix}$$